

Il calcolo strutturale nell'Ottocento. La scuola italiana

Danilo Capecchi

Il calcolo delle strutture delle opere architettoniche con metodi fondati sulla meccanica ha un'origine abbastanza recente. A parte sporadiche applicazioni nel Settecento, è nell'Ottocento con l'edilizia industriale e con i ponti ferroviari in acciaio che cominciano a essere utilizzati metodi di calcolo fondati sulla meccanica, a mano a mano più sofisticati, dapprima facendo riferimento solo all'equilibrio poi tenendo conto anche dell'elasticità dei componenti strutturali. Verso la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento c'è un ulteriore sviluppo del calcolo strutturale che riguarda le costruzioni civili con la diffusione degli edifici in cemento armato che sostituiscono quelli in muratura. La teoria matematica delle strutture basata su metodi meccanici si sviluppa essenzialmente tra il 1820 e il 1890. Prima di allora quasi tutte le costruzioni sono in muratura e vengono progettate con regole empiriche codificate nei manuali di architettura. Nel Settecento, anche se sono ormai disponibili sofisticati metodi di analisi statica, la loro applicazione alle strutture è sporadica; sono comunque sviluppati interessanti metodi per il dimensionamento degli archi da parte di Philippe de La Hire (1640-1718) e Charles Augustin Coulomb (1736-1806)¹. Lo sviluppo del calcolo strutturale nell'Ottocento può essere diviso in due fasi. La prima è caratterizzata dalla formulazione di teorie strutturali embrionali di travi, piastre e volte elastiche; si risolvono semplici strutture, senza però una completa comprensione delle metodologie. La nazione guida è la Francia e il protagonista può essere considerato Claude-Louis Navier (1785-1836). Nella seconda fase, che si può far iniziare dagli anni Quaranta, l'attenzione è concentrata principalmente sulle strutture formate da travi e aste; la Germania affianca la Francia e diviene poi essa la nazione guida. In questo periodo si riscontra la parziale subalternità dell'Inghilterra al Continente. Questa seconda fase può essere divisa in due sottofasi. La prima sottofase riguarda il dimensionamento dei tralicci isostatici, fondamentali nell'edilizia industriale e civile dell'epoca, quali ponti e tettoie. Per facilitare il calcolo delle complesse strutture reticolari, per esempio le capriate dei capannoni industriali o le travature da ponte, vengono elaborate tecniche analitiche e grafiche assai efficienti. La

seconda sottofase riguarda i sistemi misti tra aste e travi, che per la loro soluzione richiedono metodi sofisticati, tra cui quelli sviluppati in Germania da Otto Mohr (1835-1918) e in Italia da Carlo Alberto Castigliano (1847-84).

A fine Ottocento si cominciano a considerare strutture molto complesse; Heinrich Müller-Breslau (1851-1925) riprende i metodi di Mohr e Castigliano e ne precisa l'uso. In ogni modo, sino all'introduzione del calcestruzzo armato e alla realizzazione di graticci multipiano a nodi rigidi le tecniche di soluzione dei telai riceveranno modesta attenzione. Nel seguito si riporta una breve sintesi degli sviluppi storici, concentrandosi su quelle che per me sono le tappe principali. Per una analisi di dettaglio si rimanda alla letteratura².

Le prime soluzioni. Il metodo delle forze; il metodo degli spostamenti

Nell'Ottocento la teoria delle strutture viene sviluppata dapprima dagli ingegneri, essendo finalizzata alle applicazioni e richiedendo metodi matematici semplici (equazioni differenziali ordinarie o equazioni algebriche). Del problema si occupano successivamente anche matematici e fisici, quando ci si rende conto che la statica dei corpi rigidi non è sufficiente per studiare le strutture oggi dette iperstatiche, ovvero le strutture soggette a vincoli sovrabbondanti, come travi su più di due appoggi o travature reticolari con aste sovrabbondanti.

Tra i tentativi di soluzione del problema, il primo successo sul piano sia teorico sia del risultato è di Navier. Egli nelle *Leçons* del 1824³, affronta il caso di travi piane con un numero di vincoli esterni superiore a tre, non risolvibili con le sole equazioni della statica. Navier riconosce tra i primi che si trova soluzione solo se si ammette la deformabilità della trave. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886) si attribuisce il merito di avere esteso l'approccio di Navier, noto oggi come metodo delle forze, a ogni tipo di struttura:

Questo metodo consiste nel cercare gli spostamenti dei punti degli elementi strutturali, lasciando in forma indeterminata le grandezze, i bracci di leva e le direzioni delle forze di cui stiamo parlando. Una volta espressi gli spostamenti in funzione di queste grandezze, si stabiliscono le condizioni definite che devono soddisfare nei punti di appoggio o di incastro, o alle giunzioni delle varie parti, o ai punti di connessione delle varie parti in cui si deve

dividere lo stesso elemento perché gli spostamenti sono espressi da equazioni diverse. In questo modo riusciamo ad avere tante equazioni quante sono le incognite, perché ovviamente nelle questioni di meccanica fisica non c'è indeterminazione.⁴

In ogni modo Saint-Venant non è in grado di delineare una procedura di applicazione semplice.

Nelle *Leçons* del 1826 Navier, oltre al metodo delle forze sopra riportato presenta anche quello oggi chiamato “degli spostamenti”. Nel suo testo di elasticità, *Theorie der Elasticität fester Körper*, del 1862 Adolf Clebsch (1833-72) usa metodi simili a quelli di Navier per il calcolo delle travature reticolari. I metodi di Clebsch e Navier sfruttano la stessa idea meccanica: l'equilibrio al nodo delle forze elastiche, ottenute valutando la variazione di lunghezza delle aste in funzione degli spostamenti dei nodi. La trattazione di Clebsch è più generale: invece di un caso specifico si riferisce a un nodo generico (quindi a infiniti nodi); invece degli angoli delle aste usano le coordinate dei nodi. Il metodo proposto per il calcolo delle travature reticolari, nonostante la semplicità e l'eleganza, non vede tuttavia ampio impiego. Il motivo è l'eccessivo numero di equazioni lineari che si devono risolvere anche per una struttura assai semplice: in una travatura reticolare media con venti nodi si deve risolvere un sistema di sessanta equazioni lineari. I metodi delle forze, in cui le equazioni sono pari al numero di incognite iperstatiche, sono generalmente molto meno impegnativi.

L'introduzione dei metodi energetici. Mohr e il principio dei lavori virtuali; la statica grafica

I primi metodi utilizzabili in pratica per l'analisi strutturale vengono comunque dall'approccio energetico alla meccanica e derivano, sebbene in modo un po' contorto, dai tentativi di risolvere il problema statico di un sistema su più di tre appoggi, portando allo sviluppo di metodi basati sulla minimizzazione delle energie potenziale e complementare elastica.

Tra i primi tentativi di applicazione dei metodi energetici all'analisi strutturale vanno segnalati quelli di James Clerk Maxwell (1831-79) e Henry Cotterill (1836-1922), l'uno scienziato famoso, l'altro ingegnere professionista oggi poco conosciuto. Entrambi scrissero, più o meno nello stesso periodo, sulla prestigiosa rivista “Philosophical Magazine”.

Nel metodo delle forze la parte più complessa tecnicamente è la scrittura delle equazioni di congruenza. Mohr trasforma il problema cinematico in uno statico tramite il principio dei lavori virtuali; la sua procedura, concepita per i sistemi reticolari, si può generalizzare per ogni sistema strutturale⁵. L'approccio di Mohr è usato ancora oggi per la risoluzione di strutture iperstatiche; esso consiste nell'individuare i vincoli sovrabbondanti, sostituirli con le reazioni incognite e per ciascuno scrivere un'equazione di congruenza.

Mohr ha fornito altri contributi fondamentali alla teoria delle strutture, con alcuni articoli apparsi tra il 1860 e il 1868. Nell'ultimo di questi è riportata la cosiddetta analogia di Mohr che vede la deformata elastica dell'asse delle travi come il diagramma dei momenti flettenti di travi fittizie opportunamente caricate e vincolate. Mohr adatterà questa procedura anche alle travature reticolari.

Durante la seconda metà dell'Ottocento ci fu una diffusione rapidissima delle tecniche di calcolo grafico per risolvere problemi ingegneristici, tra tutti la determinazione delle forze nelle travature reticolari che venivano usate frequentemente per l'edilizia industriale e per la costruzione dei ponti. Il termine utilizzato per indicare queste tecniche fu "statica grafica". Corsi di statica grafica si tennero in tutta Europa (Zurigo, Berlino, Darmstadt, Monaco, Dresda, Riga, Vienna, Praga, Gratz, Brunn) e negli Stati Uniti. In Italia c'erano corsi a Milano (all'Istituto tecnico superiore) e, dopo il 1870, in molte Scuole di applicazione per ingegneri, tra cui Padova, Napoli, Torino, Bologna, Palermo, Roma, e anche presso le università di Pisa e Pavia. Nella seconda metà dell'Ottocento, dopo la fondamentale monografia di Carl Culmann (1821-81), il termine statica grafica veniva usato con un significato ristretto, per indicare una disciplina che univa il calcolo grafico alla geometria proiettiva, o geometria di posizione come si chiamava allora⁶.

Gli sviluppi alla fine dell'Ottocento

Gli studi di teoria delle strutture sino a fine Ottocento sono concentrati su travi continue, archi e tralicci isostatici e iperstatici. L'analisi di questi ultimi, strutture veramente complesse, richiedeva una notevole mole di calcoli e gran parte degli sforzi degli ingegneri, in particolare tedeschi, è diretto a sviluppare procedure grafiche e analitiche per un calcolo più agevole rispetto all'utilizzo esplicito delle equazioni della statica.

Nello stesso tempo, la migliore comprensione del comportamento delle strutture porta a vedere che il modello di traliccio con nodi-cerniera per le travature reticolari non è del tutto soddisfacente. Si deve così arricchire il modello di calcolo per tenere conto degli incastri di fatto esistenti alle giunture. Il problema viene risolto con procedure sia esatte sia approssimate, cui hanno contribuito tra gli altri Engesser, Winkler, Ritter, Müller-Breslau, Mohr. I tralicci Vierendeel nell'industria alla fine dell'Ottocento e i telai in calcestruzzo armato nell'edilizia civile agli inizi del Novecento, entrambi a nodi rigidi, portano a una revisione completa dei metodi di calcolo.

La scuola italiana. Luigi Federico Menabrea; Carlo Alberto Castigliano

Il periodo successivo all'Unità d'Italia è caratterizzato dal risorgere degli studi scientifici. Nel 1859 c'è la riforma Casati, che istituisce le Scuole di applicazione per gli ingegneri, prima a Torino e poi nelle principali città d'Italia. Come già avvenuto in Francia, Inghilterra e Germania, si consolida in Italia la tradizione di una trattatistica universitaria per fornire una preparazione adeguata alla futura classe dirigente. Il calcolo infinitesimale, la teoria dei determinanti, la geometria analitica, la meccanica razionale, la geometria descrittiva sono solo alcuni degli argomenti oggetto dei nuovi trattati universitari. Oltre a questi argomenti di carattere puramente matematico nelle nuove Scuole di applicazione per ingegneri riceveranno una grossa attenzione i trattati e le ricerche sulla teoria dell'elasticità, la meccanica del continuo, la meccanica delle strutture, la statica grafica.

Un contributo fondamentale al calcolo delle strutture elastiche è quello di Luigi Federico Menabrea (1809-96). Menabrea è il primo a formulare in modo operativo un criterio energetico, utile per il calcolo delle strutture iperstatiche, limitandosi al caso di travature reticolari. È ben noto a Menabrea dalla statica dei corpi rigidi che le sole equazioni di equilibrio non bastano a risolvere univocamente un sistema di n nodi e m aste, con $m > 3n - 6$ (sistema iperstatico). Per arrivare a una soluzione bisogna mettere in conto anche la deformazione e le caratteristiche meccaniche degli elementi costituenti il sistema in esame, le quali forniscono le equazioni aggiuntive idonee a rendere determinato il problema. Menabrea mostra che le equazioni aggiuntive a quelle della statica per risolvere il problema elastico si ottengono utilizzando l'*équation d'élasticité*, che nel suo lavoro *Nouveau principe sur la distri-*

bution des tensions dans les systèmes élastiques del 1858, è formulato nel modo seguente:

Quando un sistema elastico è equilibrato sotto l'azione di forze esterne, il lavoro sviluppato [l'energia elastica] per effetto delle tensioni o compressioni delle aste che uniscono i vari punti del sistema è minimo.⁷

Carlo Alberto Castigliano perfeziona la teoria di Menabrea; il suo principale contributo alla teoria delle strutture elastiche riguarda il dimensionamento dei sistemi di aste e travi (telai) precisato per la prima volta nella sua tesi di laurea in ingegneria del 1873 intitolata *Intorno ai sistemi elastici*⁸. Qui il principio di elasticità di Menabrea è esteso dai sistemi reticolari a quelli inflessi. Nella citazione seguente è riportato in sintesi il metodo di soluzione dei sistemi elastici proposto da Castigliano:

In pratica non avviene quasi mai che si adoperino dei sistemi elastici semplicemente articolati, cioè dei sistemi composti soltanto di verghe elastiche congiunte a snodo: invece sono continuamente adoperati dei sistemi che chiamerò *misti*, composti di travi rinforzate da saette o tiranti, cioè da verghe elastiche congiunte a snodo colle travi in diversi punti della loro lunghezza, e fra loro. Affinché dunque un teorema intorno ai sistemi elastici abbia un'utilità pratica, bisogna che esso sia applicabile ai sistemi misti. Questo pregio ha appunto il teorema del minimo lavoro, e è solo per ciò, che io mi sono adoperato, quanto ho potuto, a dimostrarne l'esattezza e l'utilità.⁹

Nel seguito, per ragioni di spazio, riporto due sole applicazioni. La prima è dovuta a Giovanni Battista Rombaux, ingegnere delle ferrovie romane, che nel 1786 pubblicò una monografia intitolata *Condizioni di stabilità della tettoja della stazione di Arezzo*¹⁰. In essa Rombaux diceva di applicare il principio di elasticità di Menabrea, ma in realtà, senza dichiararlo, era piuttosto a Castigliano che si ispirava.

Nel calcolo della copertura della stazione, di luce di 28 metri, Rombaux propone di trattare la centina come se fosse costituita da due sottostrutture isostatiche in parallelo. La prima sottostruttura è costituita

dall'arco dei puntoni, corrispondente alla linea a tratto doppio della figura a pag. 28; la seconda è costituita dall'intera struttura trattata come una trave reticolare. La prima sottostruttura assorbe la porzione h dei carichi verticali, la seconda la porzione k , in modo tale che si abbia $h + k = 1$; gli elementi dell'arco sono soggetti sia a sforzo normale sia a momento flettente; gli elementi della trave reticolare solo a sforzo normale. Sommando su tutti gli elementi strutturali si ottiene l'espressione del lavoro elastico dell'intera centina in funzione dei coefficienti h_1 e k ; il minimo del lavoro elastico rispetto a h_1 e k risolve il problema strutturale.

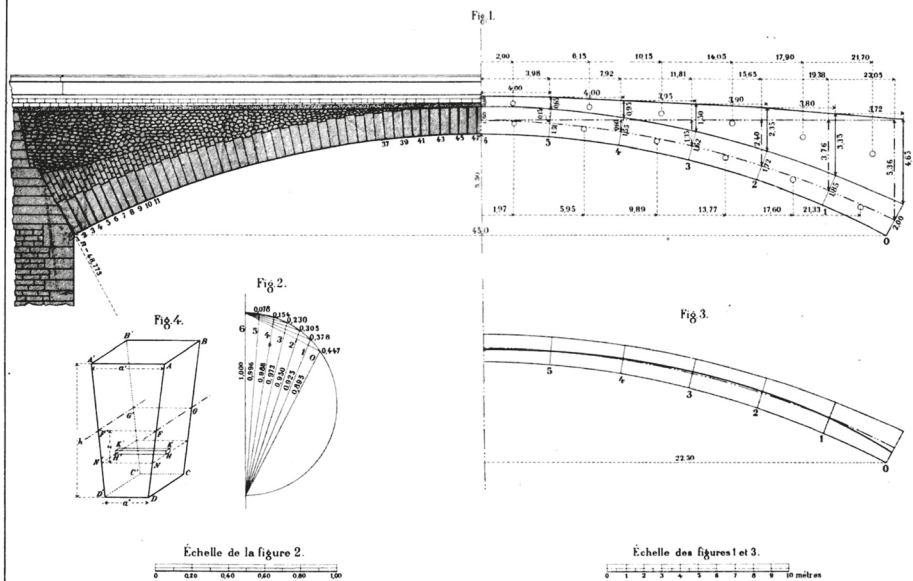
L'applicazione successiva, dovuta a Castigliano e riferita nel suo lavoro *Théorie des systèmes élastiques et ses applications* del 1879, riguarda il calcolo del ponte stradale sulla Dora a Torino, un ponte ad arco in granito abbastanza ribassato (luce di 45 metri e saetta di 5,5 metri). Il ponte era stato costruito dall'ingegnere Carlo Bernardo Mosca nel 1828 con una accuratezza molto apprezzata da Castigliano. Inoltre, anche la notorietà dell'opera aveva influito sulla scelta. La volta del ponte, riportato a pag 30, è di conci di granito di Malanaggio, presso Pinerolo, disposti in 93 ordini. I rinfianchi sono di muratura, il riempimento è in terra battuta. Su questo riempimento si ha una massicciata stradale. I conci in chiave e alle spalle sono di malta invece che di granito.

La struttura è tre volte iperstatica, ma Castigliano la riduce a due, ignorando la deformabilità a taglio. Effettua un'analisi accurata dei carichi e delle caratteristiche meccaniche, aree trasversali e momenti di inerzia, dividendo la linea d'asse del ponte in dodici tronchi uguali, della lunghezza di 4 metri. Le incognite che assume sono lo sforzo normale N e il momento in chiave M . Minimizzando l'energia elastica ottenuta integrando numericamente su tutto il ponte egli ottiene due equazioni lineari in N e M , che risolto permette la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione in tutte le sezioni.

Conclusioni

L'Ottocento vede lo sviluppo delle tecniche di calcolo per le nuove tipologie strutturali rese necessarie a seguito degli sviluppi tecnologici, in particolare ponti ferroviari e edifici industriali. Vengono messe a punto delle procedure che sono ancora oggi in uso, magari integrate con l'utilizzo del calcolo matriciale e degli elaboratori elettronici. Le

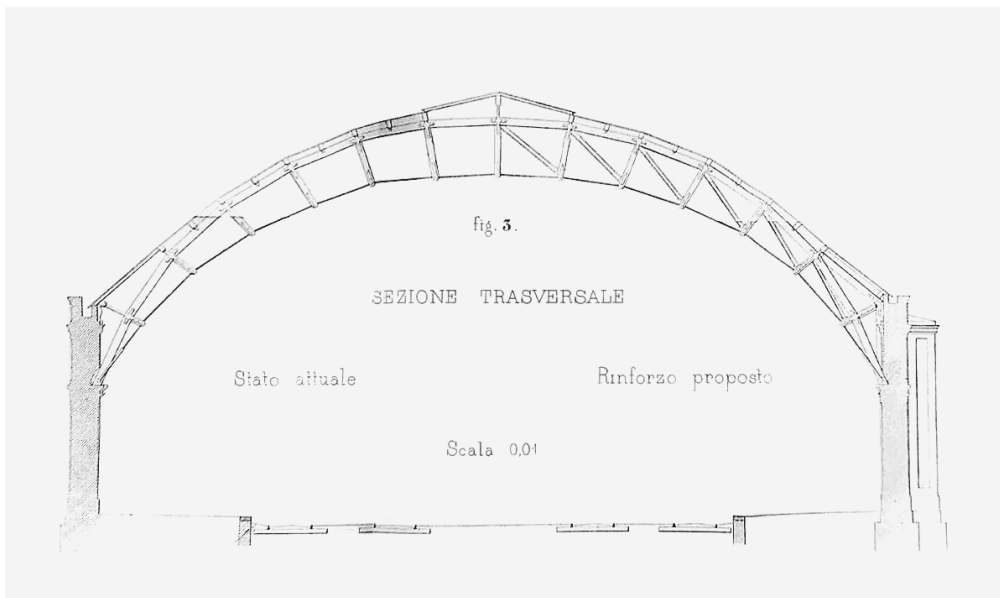
ETUDE DU PONT EN PIERRE DE TAILLE
 construit sur la Doire à Turin, par l'ingénieur Charles Mosca.



Carlo Alberto Castigliano, studi sul ponte Mosca
 in *Théorie des systèmes élastiques et ses applications*, 1879

Carlo Bernardo Mosca, ponte Mosca, Torino, 1828, in una fotografia del 2008

procedure si possono dividere in due categorie, il metodo delle forze e il metodo degli spostamenti. Il primo metodo era quello più semplice da usare nell'Ottocento perché richiedeva la soluzione un numero di equazioni molto minore. Il metodo degli spostamenti, seppure più semplice da codificare, non era adatto alle possibilità di calcolo dell'epoca; esso prenderà nuovo vigore e diventerà il metodo principale di soluzione nella seconda metà del XX secolo. Allo sviluppo delle metodologie di calcolo hanno dato un contributo importante gli studiosi italiani, tra di essi Alberto Castigliano che ha introdotto un criterio energetico per il calcolo delle strutture con un numero di vincoli esuberante.



1. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics. An essay in the history of civil engineering*, Cambridge University Press, Cambridge 1972.

2. Si rimanda a D. Capecchi, G. Ruta, *La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento*, Springer, Milano 2010; T.M. Charlton, *A history of theory of structures in the nineteenth century*, Cambridge University Press, Cambridge 1995; E. Benvenuto, *An introduction to the history of structural mechanics* (2 voll.), Springer, New York 1991.

3. C.L.M.H. Navier, *Leçons données à l'Ecole de ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant*, Dunod, Parigi 1826.

4. A.J.C., Barré de Saint-Venant, *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure en prenant simultanément en considérations les diverse efforts auxquelles peuvent être soumises dans tous les sens*, in "Comptes Rendus", n. 17, 1843, p. 953.

5. Si veda O. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, in "Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur Vereins zu Hannover", n. 20, 1874, pp. 509 e ss.

6. C. Culmann, *Die graphische Statik*, Meyer und Zeller, Zurigo 1866.

7. L.F. Menabrea, *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les sys-*

tèmes élastiques, in "Comptes Rendus", n. 46, 1858, p. 1056.

8. C.A. Castigliano, *Intorno ai sistemi elastici. Dissertazione presentata da Carlo Alberto Castigliano alla Commissione Esaminatrice della R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri in Torino*, Bona, Torino 1873.

9. Id., *Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*, in "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", n. 10, 1875, p. 29.

10. G.B. Rombaux, *Condizioni di stabilità della tettoia della stazione di Arezzo*, Tipografia e litografia del Giornale del Genio Civile, Roma 1876.